

科技部補助
大專學生研究計畫研究成果報告

計 畫 ： 基於量子電腦基本邏輯閘之量子隨機基準測試分析 名 稱
--

報 告 類 別 ： 成果報告
執行計畫學生： 鄭凱鴻
學生計畫編號： MOST 110-2813-C-002-392-E
研 究 期 間 ： 110年07月01日至111年02月28日止，計8個月
指 導 教 授 ： 鄭皓中

處 理 方 式 ： 本計畫可公開查詢

執 行 單 位 ： 國立臺灣大學電信工程學研究所

中 華 民 國 111年03月28日

基於量子電腦基本邏輯閘之量子隨機基準測試分析

國立臺灣大學電機工程學系 鄭凱鴻

目錄

(一) 摘要	
(二) 前言	
(三) 研究目的	
(四) 文獻探討	
一、Clifford Randomized Benchmarking (Clifford RB): Protocol.....	
(i) Clifford Group	
(ii) Clifford RB Protocol.....	
二、Clifford Randomized Benchmarking (Clifford RB): Theory.....	
(i) Unitary 2-Design.....	
(ii) Depolarizing Channel	
三、Direct Randomized Benchmarking (Direct RB)	
(五) 研究方法	
一、量子基本邏輯閘組選擇.....	
二、數值模擬環境.....	
(六) 結果與討論	
(七) 參考文獻	

(一) 摘要

隨著量子電腦中的量子位元 (Qubit) 數量迅速增長，如何準確的估計並刻畫量子電路運算的品質，成為了一個重要的研究方向。Randomized Benchmarking (RB) 為一種所需運算資源量不大，實作上方便，且能給出特定邏輯閘組的平均錯誤率的一種方法，也是目前用於評估量子電路品質的主要方法。但由於 RB 運作時需要將邏輯量子位元開，依照不同量子系統的操作方式，重新編譯為物理上能夠實現的基本邏輯閘。但由於一個邏輯量子位元開可能會被拆解成多個基本邏輯閘，因此實際執行的邏輯閘序列會過長，影響實驗結果的正確性。本研究的目的便是藉由使用量子電腦中的基本邏輯閘為主體，探究在這樣的設定下，我們應該如何解讀 RB 所得到的數據。本研究透過數值模擬單一量子位元系統中使用量子電腦中的基本邏輯閘的 RB，探究並討論此一方法的利與弊，並和 RB 中最經典的 Clifford RB 比較。

(二) 前言

自 1980 年代 Richard Feynman 提出使用量子力學的方式來模擬量子系統的想法開始[1]，量子計算與電腦的研究便逐步發展。截至目前已有許多量子演算法被發明，而量子電腦也成功於不同物理平台實作，如：核磁共振[2]、超導體[3]、離子阱[4]等，且取得程度不一的進展。

話雖如此，實際上目前量子電腦中的量子位元 (Qubit) 數量仍不多，也很容易受雜訊的影響，導致其中量子邏輯閘 (Quantum Logic Gate) 的高錯誤率。這樣的環境下，實驗上如何有效評估量子邏輯閘的品質，便是個重要的研究方向。長遠來看，當量子位元數量多到足以使用量子錯誤更正碼 (Quantum Error Correction Code) 時，我們需精準地操作量子位元，方能使錯誤更正碼發揮功效。因此精確估計量子運算的準確率，並了解雜訊的特性，對未來引進量子錯誤更正碼及容錯量子運算 (Fault-Tolerant Quantum Computation)，扮演著極關鍵的角色。

RB 為一複雜度低、實作容易、能抵抗初始狀態製備以及量測 (State Preparation and Measurement, SPAM) 錯誤、也可能適用較大量子系統的方法。現今主流的 RB 實作協定，是從 Clifford Group 中隨機選擇一串長短不一的量子邏輯閘序列，並量測最後結果的正確性。理論上已證明[9]，這樣的協定可得到一個足以描述 Clifford Group 中的量子邏輯閘平均準確率的參數。由於 Clifford RB 實作方便，它已廣泛應用在量子電腦上，且自從 Clifford RB 提出後，陸續有不同 RB protocols 被提出，例如刻畫 Clifford Group 中特定邏輯閘，而非平均邏輯閘準確率的方法[11]、將量子邏輯閘的範圍從 Clifford Group 放寬成也可以適用於 T-Gate，如此便可將 RB 適用於一組能實現通用量子計算 (Universal Quantum Computation) 的邏輯閘等。Clifford RB 因執行隨機試驗的次數及實驗資料分析的複雜度都和量子位元數 n 無關[12]，故理論上適用任意 n 個量子位元的邏輯閘。理論上 Clifford RB 所衡量的是「平均一個 n 量子位元 Clifford 邏輯閘的平均正確率」，但實驗上無論何種邏輯閘，在硬體運行時都需編譯成相應的基本邏輯閘組 (Native Gate Set)。[14]的結果指出，一個 n 量子位元的 Clifford 邏輯閘會編譯成 $O(n^2/\log(n))$ 個 1 或 2 量子位元的邏輯閘，因此 n 變大時，由於實際電路大小和一個 Clifford 邏輯閘所對應的錯誤率快速增加，使得 RB 無法有效適用。故目前 Clifford RB 最多只適用到 3 量子位元的邏輯閘，仍無更高量子位元的結果被提出。

(三) 研究目的

考慮 Clifford RB 實際應用難以擴充至多量子位元的邏輯閘，[12] 提出了一個新的 RB 方法：Direct RB。和 Clifford RB 最大的不同之處在於，它並非以 Clifford 邏輯閘為單位，而是以該量子電腦的基本邏輯閘組為基本單位。[12]主要為提出想法，對於應該如何使用基本邏輯閘以及相關的雜訊模型等問題皆無探討。但根據 [12] 的模擬結果以及在 IBM 量子電腦上運行的結果看來，其所提出的 Direct RB 確有潛力。不過由於文獻中提出這個想法後，並沒有對其有更深入的討論，因此本研究便著眼於使用數值模擬，探究在單一量子位元的系統中，於不同的雜訊模型以及雜訊強度的條件下，使用量子電腦之基本邏輯閘執行 RB 所得之結果，與 Clifford RB 的結果比較。此外，本研究也嘗試探究在我們的模擬條件下，使用 Direct RB 後理論上所得到的量子通道及使用 Clifford RB 所得知結果的量化比較。

(四) 文獻探討

一、Clifford Randomized Benchmarking (Clifford RB): Protocol

(i) Clifford Group

n 量子位元的 Clifford Group, C_n , 定義為 $C_n = \{U: UPU^\dagger \in P_n, \forall P \in P_n\}$, P_n 為 n 量子位元的 Pauli Group, 亦即由 $\{I, X, Y, Z\}$ 四個單量子位元的 Pauli Gate 的 n 次張量積所生成的群。

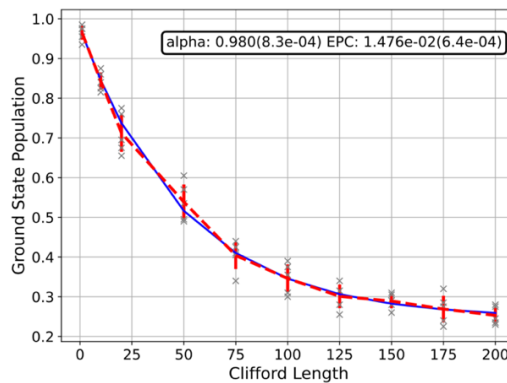
當一個量子電路中只有 Clifford Group 中的量子邏輯閘時, 我們可以使用古典電腦有效率 (於多項式時間複雜度以內) 模擬此量子電路[6]。單就 Clifford Group 組成的電路雖無法達成通用量子計算, 但只要加上一個額外的量子邏輯閘, 例如 Toffoli 或 T Gate 便可以達成。因此在 RB 的發展過程中, 能夠適用於 T Gate 的想法, 緊接著 Clifford RB 發展出來[11, 15]。

(ii) Clifford RB Protocol

根據 [8, 16] 中所述, Clifford RB 可拆解為以下 8 個步驟:

1. 選擇 $\vec{m} = (m_1, \dots, m_l)$, 且 $m_1 < m_2 < \dots < m_l$ 。 m_i 代表實驗的 Clifford Gate 序列長度。對於 $i = 1, \dots, l$, 重複以下步驟 2~6
2. 隨機平均挑選長度為 m_i Clifford Gate 序列。
3. 計算這串邏輯閘序列的反運算 $C_{inv} = (C_1 C_2 \dots C_{m_i})^{-1}$, 並將其放在邏輯閘序列的最尾端。
4. 製備電路初始輸入狀態 ρ (一般而言, 取 $\rho = |0\rangle\langle 0|$)。
5. 執行電路並量測。
6. 重複步驟 2~5 共 k 次, 估計邏輯閘序列長度為 m_i 時的量測結果正確率。
7. 將量測正確率 $\vec{s} = (s_1, \dots, s_l)$ 和序列長度 $\vec{m} = (m_1, \dots, m_l)$ 的資料曲線擬合, 得到一個指數遞減的曲線: $\vec{s} = A p^{\vec{m}} + B$, 其中的 p 為擬合出來的參數。
8. 計算邏輯閘平均錯誤率 $r = \frac{(1-p)(d-1)}{d}$ 。其中 $d = 2^n$, n 為系統量子位元數。

圖一為 Clifford RB 的數據擬合結果示意, 圖中的縱軸即為量測結果正確的比率, 而橫軸為所執行的電路中, Clifford Gate 的序列長度。圖中可看出, 對於不同長度的邏輯閘序列進行了多次實驗 (灰色的叉叉), 並以平均結果作為最後曲線擬合的依據。從曲線擬合所得到的參數 (圖中的 α) 即可計算出平均每個 Clifford Gate 的錯誤率 (圖中的 EPC, Error Per Clifford)。



圖一：Clifford RB 的數據擬合結果示意[17]。

二、Clifford Randomized Benchmarking (Clifford RB): Theory

(i) Unitary 2-Design

Unitary 2-Design 的定義如下[18]：對於任意么正矩陣（Unitary Matrix）的有限集合 $\{U_k\}$ ，如果 $\{U_k\}$ 滿足以下關係

$$\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K U_k^\dagger \Lambda(U_k \rho U_k^\dagger) U_k = \int_{U(d)} d\eta(U) U^\dagger \Lambda(U \rho U^\dagger) U$$

則稱集合 $\{U_k\}$ 為 Unitary 2-Design。其中個別 U_k, U 皆為么正矩陣， ρ 為描述量子狀態的密度矩陣， Λ 代表量子通道， $U(d)$ 則為所有 $d \times d$ 的么正矩陣， η 為 Haar Measure。這個定義告訴我們，當我們想要計算所有可能的 $d \times d$ 么正矩陣作用的平均效果，可以單純計算 Unitary 2-design 中有限個么正矩陣的平均效果。此性質帶來極大的方便，因為光是要使用一個 n 量子位元的電路，從 Haar measure 中選擇一個隨機的么正矩陣，便需要 $O(n^2 4^n)$ 個邏輯閘[19]，但如果只是計算一個已知的矩陣有限集合，那麼所需要的電路複雜度將會大幅下降。

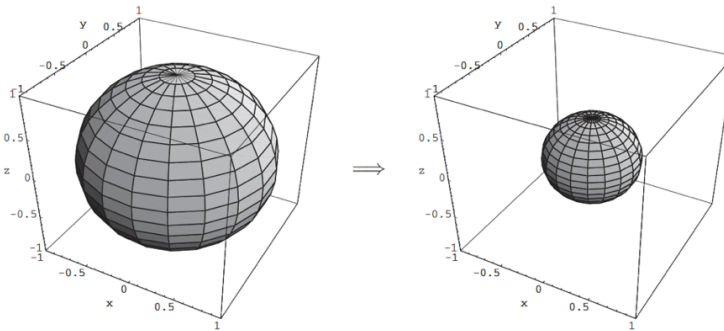
Clifford Group 被證明是 Unitary 2-design。因此對 Clifford Group 取平均的效果也和對整個 Haar measure 平均的效果相同[18]。Clifford Group 的優勢在於一個 n 量子位元的 Clifford Gate 可以用 $O(n^2/\log(n))$ 個 1 以及 2 量子位元的邏輯閘合成[13]，電路實作上相對可行。

(ii) Depolarizing Channel

Depolarizing channel 是一種量子雜訊的模型，由單一參數 p 所刻畫。其效果為，有 $1-p$ 的機率使量子狀態變成完全隨機，另外 p 的機率則使這個量子態不受影響。數學形式如下：

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p) \frac{I}{d} + p\rho$$

其中 ρ 為量子狀態的密度矩陣， d 為量子系統的維度。對單一量子位元而言，Depolarizing channel 的效果便是將 Bloch sphere 均勻收縮，而收縮的比率是由參數 p 所決定，例如圖二中 $p = 0.5$ 。



圖二：Depolarizing channel 對 Bloch sphere 的影響， $p = 0.5$ [5]。

Depolarizing channel 在 Clifford RB 之中的重要性在於，我們已知 Clifford Group 為 Unitary 2-design，因此對於 Clifford Group $\{C_k\}$ 而言，以下關係成立：

$$\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K C_k^\dagger \Lambda(C_k \rho C_k^\dagger) C_k = \int_{U(d)} d\eta(U) U^\dagger \Lambda(U \rho U^\dagger) U$$

亦即對於 Clifford group twirling 的結果等同於對整個 unitary group twirling。
根據[20]，

$$\int_{U(d)} d\eta(U) U^\dagger \Lambda(U \rho U^\dagger) U = (1-p) \frac{I}{d} + p \rho$$

Clifford RB 可將一個未知的量子通道變成由單一個參數刻畫的 depolarizing channel。

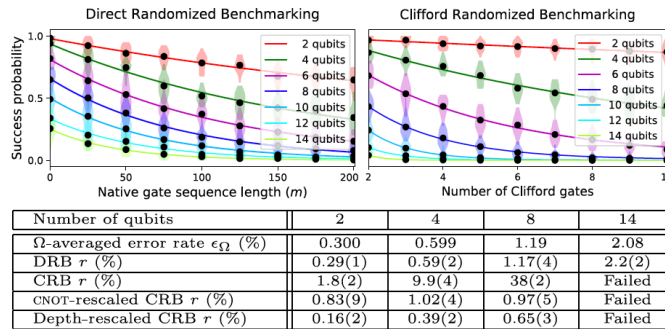
量子狀態經過 depolarizing channel 後，有 $(1-p)\frac{1}{d} + p$ 的機率不受影響。我們定義平均

錯誤率 $r = 1 - [(1-p)\frac{1}{d} + p]$ 。整理後得到 Clifford RB 平均錯誤率的式子 $r = \frac{(1-p)(d-1)}{d}$ 。正

因為 Clifford RB 能將一個未知的 noisy quantum channel 轉變成一個 depolarizing channel，才能夠用單一參數的曲線擬合，描述一組量子邏輯閘的錯誤率。

三、Direct Randomized Benchmarking (Direct RB)

Direct RB 由[12]於 2019 年提出，目的是解決 Clifford RB 在多個量子位元的邏輯閘上實作時，需將邏輯上的 Clifford Gate 編譯成量子電腦上實際運行的基本邏輯閘組，造成實驗結果和理論預測出現誤差的問題。原因是當量子位元數量增加時，會需要使用更多的基本邏輯閘（和量子位元數 n 呈現 $O(n^2/\log(n))$ 的成長）而每個基本邏輯閘實際上都有各自的雜訊，因此 Clifford RB 的曲線會迅速下降。Direct 和 Clifford RB 的不同在於它的基本單位並非 Clifford gate，而是量子電腦的基本邏輯閘。其與 Clifford RB 相同之處在於兩者皆是藉改變電路深度，量測不同電路深度下的正確率，並將實驗數據擬合為指數衰減的曲線，以獲得刻畫電路平均雜訊的參數。圖三的模擬結果顯示出 Clifford RB 在量子位元數量較大時會失效，而 Direct RB 仍然有可能適用，且估計出來的平均邏輯閘錯誤率和實驗者預測的接近。



圖三：Direct RB 和 Clifford RB 的模擬結果比較[12]。

Direct RB 的執行步驟描述如下[12]：

1. 選擇 $\vec{m} = (m_1, \dots, m_l)$ ，且 $m_1 < m_2 < \dots < m_l$ 。 m_i 代表當輪的基本邏輯閘序列長度。對於 $i = 1, \dots, l$ ，重複以下步驟 2 ~ 6
2. 隨機挑選層數為 m_i 的基本邏輯閘序列電路 $\mathcal{R}_{m_i}$ （機率分佈為使用者自訂）。
3. 隨機平均挑選一個 n 量子位元的 stabilizer state $|\psi\rangle$ [13]。
4. 將電路初始輸入狀態設定為 $|\psi\rangle$ 。
5. 執行 $\mathcal{R}_{m_i}$ 電路並量測結果。

6. 重複步驟 4, 5 N 次以獲得一個特定電路的平均正確率。
7. 重複步驟 2~6 共 k_{m_i} 次，估計邏輯閘序列長度為 m_i 時的量測結果正確率。
8. 將量測結果正確率 $\bar{s} = (s_1, \dots, s_l)$ 和序列長度 $\bar{m} = (m_1, \dots, m_l)$ 的資料曲線擬合，得到一個指數遞減的曲線： $\bar{s} = Ap^{\bar{m}} + B$ ，其中的 p 為擬合出來的參數。
9. 計算邏輯閘平均錯誤率 $r = \frac{(4^n - 1)(1 - p)}{4^n}$ 。其中 n 為系統量子位元數。

雖說 Direct RB 在模擬及實驗上顯現的結果都十分的正面，但 [12] 的內容仍有不足之處。首先，[12] 的作者在 Direct RB 的理論中，只考慮了 Pauli-stochastic error 的情況，並沒有討論其他可能的雜訊種類和強度。其次，Clifford RB 可以將一個帶雜訊的量子通道轉換成一個 depolarizing channel，進而能夠使用指數衰減的曲線擬合實驗數據，並用單一參數描述的特性，在 Direct RB 中是否也能這樣做，並無更深入的討論。因此，本研究著眼於模擬使用單一量子位元的基本量子邏輯閘的 RB，探討此方法在不同的量子雜訊模型中的適用性，更進一步討論並量化一個一般的量子通道在經過基本量子邏輯閘的作用後，和 Clifford RB 所產生理想的 Depolarizing channel 的差異，以期能藉此資訊判斷實驗數據合理性。

(五) 研究方法

本研究主要以數值模擬的方式，探討單一量子位元下，使用基本邏輯閘的 RB，因此本段會分成兩部分，分別解釋如何選擇模擬中所用的基本邏輯閘組，以及模擬環境的設定，包含所使用的程式軟體，以及額外所使用的外部套件等等。

一、量子基本邏輯閘組選擇

如本報告前言所述，雖說各個物理平台的成熟度不一，但目前已經有諸多不同的物理系統皆能用於實現量子電腦。因此，我們若想要使用量子基本邏輯閘執行 RB，第一步便是需要了解我們所欲處理的系統的規格以及特性。本研究模擬所使用的量子基本邏輯閘，便是使用 [21, 22] 當中提到以矽量子點（Silicon Quantum Dot）為基礎的量子位元所使用的邏輯閘。在單一量子位元的系統中，Clifford Gate 的數量總共有 24 個，而這 24 個量子閘也能被拆解成我們所使用的量子基本邏輯閘之組合。本研究所使用的基本邏輯閘組如下：

$$N_1 = \{I, X, Y, R_x\left(\frac{\pi}{2}\right), R_y\left(\frac{\pi}{2}\right), R_x\left(-\frac{\pi}{2}\right), R_y\left(-\frac{\pi}{2}\right)\}$$

其中 $R_x\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 代表對 Bloch Sphere 的 x 軸旋轉 $\frac{\pi}{2}$ 角度，其餘依此類推。此外，由於

$\{X, Y, R_x\left(-\frac{\pi}{2}\right), R_y\left(-\frac{\pi}{2}\right)\}$ 四個操作皆能藉由 $R_x\left(\frac{\pi}{2}\right), R_y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 達成，因此我們也定義另一組基本邏輯閘組：

$$N_2 = \{I, R_x\left(\frac{\pi}{2}\right), R_y\left(\frac{\pi}{2}\right)\}$$

單一量子位元的系統 Clifford Gate 拆解為基本邏輯閘的詳細分解列於圖四。

Clifford gate	Physical gates
1	I
2	Y/2, X/2
3	-X/2, -Y/2
4	X
5	-Y/2, -X/2
6	X/2, -Y/2
7	Y
8	-Y/2, X/2
9	X/2, Y/2
10	X, Y
11	Y/2, -X/2
12	-X/2, Y/2
13	Y/2, X
14	-X/2
15	X/2, -Y/2, -X/2
16	-Y/2
17	X/2
18	X/2, Y/2, X/2
19	-Y/2, X
20	X/2, Y
21	X/2, -Y/2, X/2
22	Y/2
23	-X/2, Y
24	X/2, Y/2, -X/2

圖四、單量子位元 Clifford 拆解為量子基本邏輯閘之組合

二、數值模擬環境

本研究使用 MATLAB（版本 R2020_b）進行數值模擬，而本研究中執行的模擬結果可分為兩類：使用基本邏輯閘之 RB 探討不同雜訊種類和參數下的狀況，以及比較及量化不同雜訊的量子通道，經過 Clifford twirling 和基本邏輯閘 twirling 的結果，與理想 depolarizing channel 的差異。

模擬基本邏輯閘執行 RB 之過程如下：

1. 建立 24 個 Clifford Gates，並計算其分解為基本邏輯閘的組合。
2. 選擇雜訊的種類（depolarizing, dephasing, amplitude damping, general random CPTP map）以及雜訊的參數。
3. 按照 Clifford RB 的程序執行，唯獨選到下一個執行的 Clifford gate 後，將其分解為基本邏輯閘，並執行之。而我們此時假設每個基本邏輯閘都有特定的雜訊。
4. 重複多次實驗並平均量測數據，得到如同 Clifford RB，正確率對邏輯閘數量的指數下降曲線。
5. 將此曲線依照所選基本邏輯閘組及 Clifford Gate 的比例關係調整。例如由於 24 個 Clifford gates 拆解為 N_1 當中的基本邏輯閘後，需要 45 個邏輯閘，因此 N_1 和 Clifford gate 的比例關係便為 $45/24 = 1.875$ 倍。 N_2 同理。

本研究之所以比較 Clifford 和基本邏輯閘 twirling 與理想 depolarizing channel 的差異並量化，動機是因為 Clifford RB 之所以在理論上成立，即是因為任何量子通道經過 Clifford twirling 後，都會變成一個可以用單一參數描述的 depolarizing channel。亦即：

$$\widehat{\Lambda}_p = \frac{1}{|n|} \sum_{i=1}^n \widehat{C}_i^\dagger \circ \widehat{\Lambda} \circ \widehat{C}_i = \text{some depolarizing channel}$$

其中 $\widehat{\Lambda}$ 為任意量子通道， $\widehat{C}_i$ 則是 Clifford gate，n 為 Clifford gate 總數。此處比較的對象則是基本邏輯閘 twirling 後的結果，亦即：

$$\widehat{\Lambda}_N = \frac{1}{|m|} \sum_{i=1}^m p_i \widehat{G}_i^\dagger \circ \widehat{\Lambda} \circ \widehat{G}_i$$

其中 $\widehat{G}_i$ 為基本邏輯閘， m 為其總數，而 p_i 則是相對應 $\widehat{G}_i$ 的相對頻率，亦即在 Clifford gates 拆解為基本邏輯閘時， $\widehat{G}_i$ 在所有的組合裡出現的相對比例。以 N_1 舉例來說，在圖四中可以看到拆解後總共有 45 個基本邏輯閘，這當中 $I = G_1$ 出現一次，則 $p_1 = \frac{1}{45}$ ，其餘則依此類推。

比較的過程如下：

1. 選定一量子通道。
2. 計算 Clifford twirling 和基本邏輯閘 twirling 後的量子通道。
3. 檢查其與各個不同參數的 depolarizing channel 之距離，使用 Diamond norm 衡量，以量化結果和理想上的 depolarizing channel 差異。

上述的 twirling 數值模擬中，使用到量子通道合成，以及計算 diamond norm 之處，皆使用開源的 MATLAB toolbox，QETLAB [24] 完成。

(六) 結果與討論

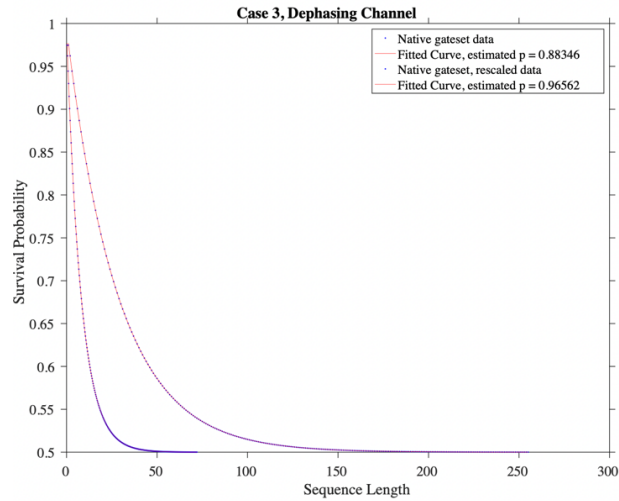
首先，為了確認以上的模擬流程以及設定正確，先將 Clifford RB 模擬之結果與理論預測比較。[25] 中指出對於一個 depolarizing channel，其 Kraus Operators 為 $\{A_k\}$ ，則其衰減參數則為：

$$p = \frac{(\sum_k |Tr(A_k)|^2 - 1)}{D^2 - 1}$$

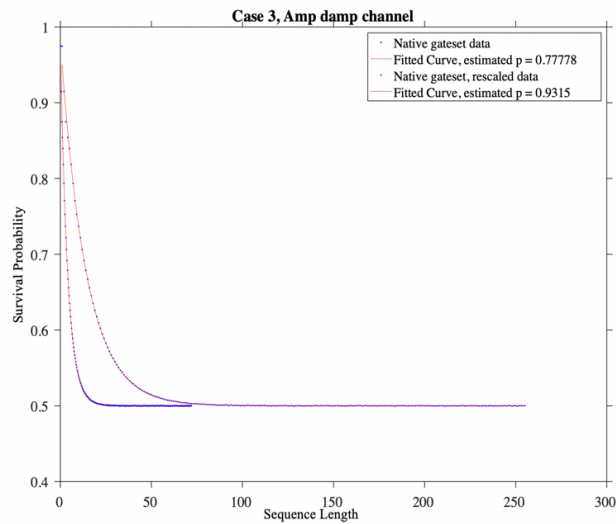
其中 D 為量子系統的維度。而我們使用不同參數的 dephasing channel 執行 Clifford RB 所得到的參數，與理論計算值吻合，如下表所示。

		$\gamma = 0.9$	$\gamma = 0.8$	$\gamma = 0.7$	$\gamma = 0.6$	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 0.4$	$\gamma = 0.3$	$\gamma = 0.2$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0$
Parameter	Clifford simulated	0.93331	0.8669	0.80046	0.73022	0.66886	0.60034	0.52545	0.45916	0.39097	0.356
	Calculated	0.93333	0.86666	0.8	0.73333	0.66666	0.6	0.53333	0.46666	0.4	0.33333

接著，我們便檢查使用基本邏輯閘執行 RB 後，得到的量測結果正確的比率和邏輯閘序列長度的數據是否也能像 Clifford RB 一樣，呈現指數型衰減趨勢。以常見的兩種雜訊模型：dephasing channel 及 amplitude damping channel 為例，結果示於下圖五、圖六。圖中兩條曲線分別代表比例關係調整前，以及比例關係調整後的數據。從數據擬合的曲線可知，使用基本邏輯閘執行 RB 的數據的確也如 Clifford RB 一般，呈現指數衰減的趨勢。



圖五、使用基本邏輯閘 RB 之模擬數據，雜訊為 dephasing channel



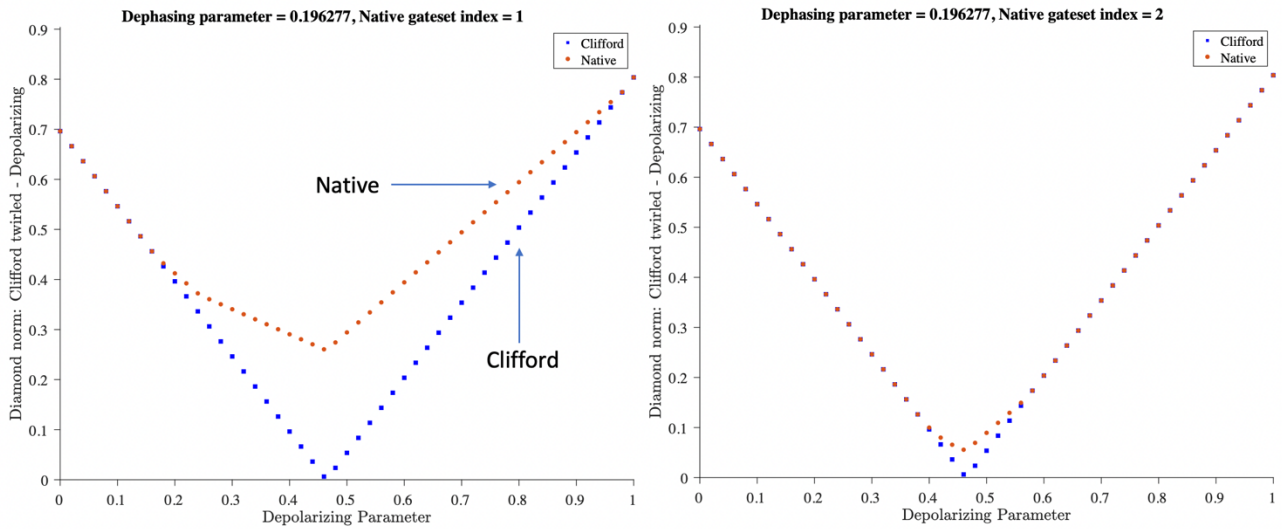
圖六、使用基本邏輯閘 RB 之模擬數據，雜訊為 amplitude damping channel

知道使用基本邏輯閘的 RB 所得到的數據也呈現指數型衰減後，下一步便是探討並量化其與 Clifford RB 之差距。因此我們便以 dephasing channel 為例，比較在不同的雜訊強度下，Clifford RB 以及使用 N_1, N_2 兩個不同的基本邏輯閘的 RB 所獲得的衰減常數，及其差距，並將結果整理於下表中。

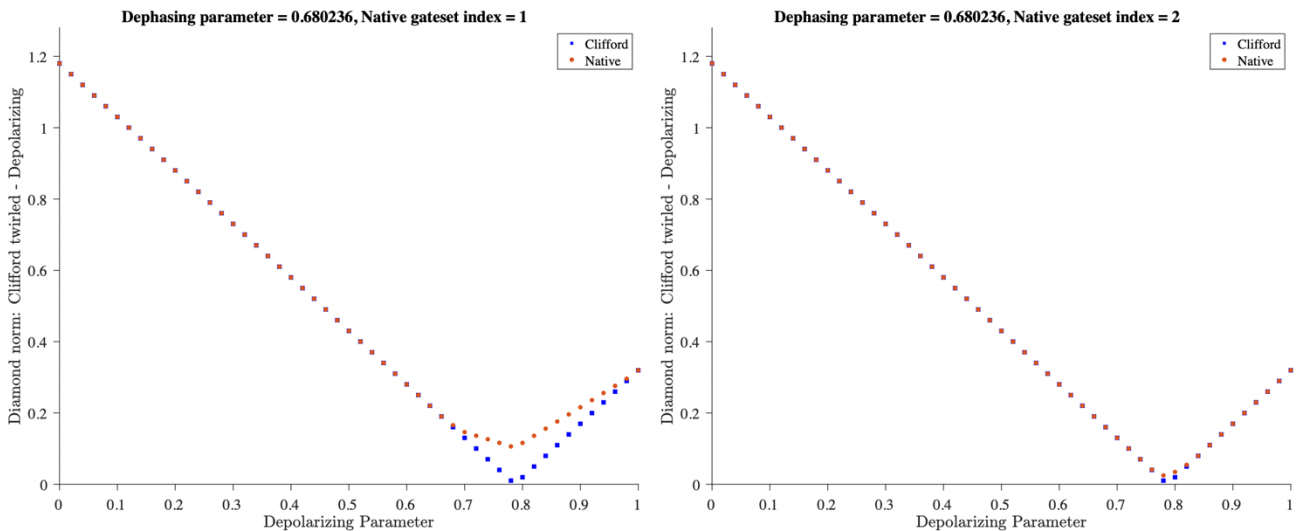
N1, N2	Dephasing	$\gamma = 0.9$	$\gamma = 0.8$	$\gamma = 0.7$	$\gamma = 0.6$	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 0.4$	$\gamma = 0.3$	$\gamma = 0.2$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0$
Fitted Parameter p	Clifford (A)	0.93331	0.8669	0.80046	0.73022	0.66886	0.60034	0.52545	0.45916	0.39097	0.356
	N1	0.93276	0.86466	0.7964	0.72817	0.6623	0.5955	0.53143	0.4695	0.39927	0.008
	N2	0.93364	0.86736	0.80266	0.73486	0.67302	0.61493	0.55957	0.49943	0.4341	0.3955
	C – N1	5.5*1e-4	2.24*1e-3	4.06*1e-3	2.05*1e-3	6.56*1e-3	4.84*1e-3	-5.98*e-3	-0.01	-8.3*e-3	0.348
	C – N2	3.3*1e-4	4.6*1e-4	2.2*1e-3	4.64*1e-3	4.16*1e-3	0.0146	0.034	0.04	0.043	0.0395

模擬數據顯示，無論是哪一組基本邏輯閘，在雜訊較小（ γ 較大）時，使用基本邏輯閘執行 RB 所獲得的衰減常數和 Clifford RB 得到的結果差異非常小，而此差異大致上隨著雜訊增加而變大。因此下一步我們便將注意力轉向探討當量子通道，此處以 dephasing channel 為例，經過 Clifford twirling 和基本邏輯閘 twirling 後的差異並量化之。

下圖七、圖八所示的便是一個 dephasing channel 經過 Clifford twirling 和基本邏輯閘 twirling 後，與特定參數的 depolarizing channel 的差異大小，以 diamond norm 衡量。圖的橫軸為 depolarizing channel 之參數，縱軸為 twirling 後的量子通道，和特定參數的 depolarizing channel 的差距。左右圖為使用不同基本邏輯閘組之結果。



圖七、dephasing channel 經 Clifford twirling 和基本邏輯閘 twirling 後與 depolarizing channel 比較
Dephasing parameter ≈ 0.196



圖八、dephasing channel 經 Clifford twirling 和基本邏輯閘 twirling 後與 depolarizing channel 比較
Dephasing parameter ≈ 0.68

前述的模擬結果顯示出，即使 dephasing channel 經過基本邏輯閘 RB 後所得到的結果和 Clifford RB 所得結果，在雜訊小時相近，但是這兩個量子通道仍非相同的量子通道。不過隨著雜訊的強度降低，此兩者的差異會越來越小。因此，我們從上述一連串的模擬中可以得到以下結論，即當雜訊的強度不大時，我們可以使用基本邏輯閘執行 RB，且我們所得到的結果會與我們使用 Clifford RB 所得之結果吻合。考慮到現今主流的量子電腦，如 IBM 的超導量子電腦，的單一量子位元邏輯閘錯誤率都已經小於 1%，因此應可適用基本邏輯閘 RB。

未來展望

由於本研究的探討範圍僅限於單一量子位元之情況，因此未來若能將研究範圍推廣至更多的量子位元，將會更具有實用價值。另外，雖然本研究提供了詳細的模擬結果和探討，但是仍未提供一個理論框架，解釋為何使用基本邏輯閘的 RB 會有我們觀察到的現象。因此，未來若有機會開發相關理論，也能增加我們對此 RB 協定的了解。

(七) 參考文獻

- [1] Richard P. Feynman. “*Simulating Physics with Computers*”. International Journal of Theoretical Physics. 21 (6/7): 467–488. (1982)
- [2] J. A. Jones. “*Quantum Computing and Nuclear Magnetic Resonance*”. PhysChemComm, 2001, 11, 1–8
- [3] Morten Kjaergaard et al. “*Superconducting Qubits: Current State of Play*”. arXiv:1905.13641v3 (2020).
- [4] Colin D. Bruzewicz et al. “*Trapped-Ion Quantum Computing: Progress and Challenges*”. arXiv:1904.04178v1 (2019).
- [5] M. Nielsen and I. Chuang. “*Quantum Computation and Quantum Information*”. Cambridge University Press (2010).
- [6] John Preskill. “*Quantum Computing in the NISQ era and beyond*”. arXiv:1801.00862v3
- [7] J. F. Poyatos et al. “*Complete Characterization of a Quantum Process: The Two-Bit Quantum Gate*”. Phys. Rev. Lett. 78, 390 (1997).
- [8] E. Knill et al. “*Randomized benchmarking of quantum gates*”. Phys. Rev. A 77, 012307 (2008).
- [9] E. Magesan et al. “*Characterizing quantum gates via randomized benchmarking*”. Phys. Rev. A 85, 042311 (2012).
- [10] E. Magesan et al. “*Efficient Measurement of Quantum Gate Error by Interleaved Randomized Benchmarking*”. Phys. Rev. Lett. 109, 080505 (2012).
- [11] R. Harper and S. T. Flammia. “*Estimating the fidelity of T gates using standard interleaved randomized benchmarking*”. Quantum Sci. Technol. 2 015008 (2017).
- [12] T. J. Proctor et al. “*Direct randomized benchmarking for multiqubit devices*”. Phys. Rev. Lett. 123, 030503 (2019).
- [13] S. Aaronson and D. Gottesman. “*Improved simulation of stabilizer circuits*”. Phys. Rev. A 70, 052328 (2004).
- [14] D. C. McKay et al. “*Three-Qubit Randomized Benchmarking*”. Phys. Rev. Lett. 122, 200502 (2019).

- [15] A. Carignan-Dugas et al. “*Characterizing universal gate sets via dihedral benchmarking*”. Phys. Rev. A 92, 060302(R) (2015).
- [16] E. Magesan et al. “*Scalable and Robust Randomized Benchmarking of Quantum Processes*”. Phys. Rev. Lett. 106, 180504 (2011).
- [17] IBM Qiskit Textbook, Randomized Benchmarking. <https://qiskit.org/textbook/ch-quantum-hardware/randomized-benchmarking.html>
- [18] C. Dankert et al. “Exact and approximate unitary 2-designs and their application to fidelity estimation”. Phys. Rev. A 80, 012304 (2009).
- [19] Olivia Di Matteo. “A short introduction to unitary 2-designs” (2014).
- [20] Michael A. Nielsen. “A simple formula for the average gate fidelity of a quantum dynamical operation”. Physics Letters A 303 (2002) 249-252.
- [21] J. Epstein et al. “Investigating the limits of randomized benchmarking protocols”. PHYSICAL REVIEW A 89, 062321 (2014)
- [22] J. T. Muhonen et al. “Quantifying the quantum gate fidelity of single-atom spin qubits in silicon by randomized benchmarking”. J. Phys.: Condens. Matter 27 (2015) 154205.
- [23] Nathaniel Johnston. QETLAB: A MATLAB toolbox for quantum entanglement, version 0.9. <http://www.qetlab.com>, January 12, 2016. doi:10.5281/zenodo.44637.
- [24] J. Emerson et al. “Scalable noise estimation with random unitary operators”. J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 7 (2005) S347–S352.
- [25] Quantum Computing Report. “IBM Demonstrates 99.9% CNOT Gate Fidelity on a New Superconducting Test Device”. URL: <https://quantumcomputingreport.com/ibm-demonstrates-99-9-cnot-gate-fidelity-on-a-new-superconducting-test-device/>